На правах рукописи

Кузуб Наталья Михайловна

ГЕОМЕТРИЯ ПСЕВДООКТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Специальность: 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

КАЗАНЬ 2004

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Иркутского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Павел Яковлевич Грушко

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Вадим Васильевич Шурыгин,

кандидат физико-математических наук, доцент Владимир Иванович Паньженский

Ведущая организация: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

Защита состоится 2004 г. в час. на заседании диссертационного совета **Д 212.081.10** при Казанском ордена Ленина и Трудового Красного Знамени государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул.Кремлевская, 18, КГУ, механико - математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 2004 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Малахальцев М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. В настоящее время структурными группами G_2 интересуются как у нас в стране, так и за рубежом, например, работы Th. Friedrich и его соавторов [1], F. M. Cabrera[2], D. Joyse[3], A. Gray[4], I. Kath[5] и другие.

В семимерном пространстве эта геометрия наиболее подходящая для исследования, так как в случае маленьких структурных групп касательные пространства многообразий и подмногообразий чрезмерно неизотропны. В то же время в случае большой структурной группы, например $SL(7)$, имеется мало инвариантов. В случае произвольной размерности ортогональная и конформная группы наиболее оптимальны в этом смысле. Но в семимерном пространстве исключительное значение имеют компактная форма и нормальная некомпактная форма группы Ли G_2. Эта группа удобна также с точки зрения использования необходимых компьютерных вычислений потому, что другие особые группы (такие как F_4 размерности 52 со стандартным представлением размерности 26) требуют значительно более долгих и сложных вычислений.

В большинстве случаев G_2-структуры рассматриваются на семимерных римановых многообразиях. Значительно реже эти структуры рассматриваются на псевдоримановых многообразиях. Например, в работе I. Kath изучаются почти параллельные G_2-структуры на псевдоримановых многообразиях сигнатуры (3,4).

Дифференциальная геометрия семимерных многообразий и различных подмногообразий (кривых, поверхностей, гиперповерхностей и так далее) в пространствах со структурной группой G_2^n очень богата по сравнению даже с обычной октавной геометрией. Это связано с тем, что стандартное семимерное представление этой группы имеет более сложную структуру пространства орбит из-за наличия изотропных векторов и изотропных подпространств. Тем более это относится к линейным многообразиям различных размерностей.

Поэтому вполне естественным является изучение пространств не только с фундаментальной группой G_2, но и с фундаментальной группой G_2^n.

Основной целью работы является изучение геометрии подмногообразий в семимерном пространстве, структурной группой которого является особая некомпактная

[1] *Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann.* On nearly parallel G_2-structures. // J. Geom. Phys. 23, 1997.- no. 3-4, p. 259-286.

[2] *F. M. Cabrera.* On Riemannian manifolds with G_2-structure. // Bolletino U.M.I. (7) 10-A, 1996.- p. 99-112.

[3] *D. Joyse.* Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. // I, J. Differential Geom. 43, 1996.- p. 291-375.

[4] *M. Fernandez, A. Gray.* Rimannian Manifolds with Structure Group G_2. // Ann.di Math. Pura ed Appl. 32, 1982.- p. 19-45.

[5] *I. Kath.* G_2^*-Stuctures on pseudo-Riemannian manifolds. // J.Geom.Phys., 27, 1998.- p. 155-177.

группа Ли G_2^n (нормальная форма комплексной группы Ли G^2).

Методы исследования. В исследовании использованы методы классической дифференциальной геометрии, включая метод внешних форм Картана и метод подвижного репера, а также техника линейной и полилинейной алгебры и теории групп Ли.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми: рассматривается и обобщается на случай произвольного нечетномерного пространства с изотропным базисом матричная реализация алгебры g_2^n; развивается теория подмногообразий различных размерностей в семимерном пространстве со структурной группой G_2^n.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретическое значение. Результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории подмногообразий семимерных пространств, снабженных структурами октавного типа.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались и обсуждались на Всероссийской молодежной научной школе-конференции по математическому моделированию, геометрии и алгебре (Казань, 1998 г.), на вузовской конференции "Студент и научно - технический прогресс"(Иркутск, 1998 г.), на Восточно-Сибирской зональной межвузовской конференции по математике и проблемам ее преподавания в вузе (Иркутск, 1999 г.), на Международном конгрессе по дифференциальной геометрии памяти Альфреда Грея (Spane, Bilbao, 2000 г.), на Всесибирском конгрессе женщин-математиков (к 150-летию со дня рождения С.В. Ковалевской) (Красноярск, 2000 г.), на международной конференции "Математика в Восточных регионах Сибири: социокультурный аспект, ведущие тенденции развития, научные коммуникации и подготовка кадров"(Улан-Удэ, 2000 г.), на четвертом Международном математическом симпозиуме "Symbolic computations. New horizons"(Japan, Tokio, 2001 г.), на международной конференции по геометрии и топологии (Украина, Черкассы, 2001 г.), на Международном конгресс математиков (China, Beijing, 2002 г.), на II Всесибирском конгрессе женщин - математиков (в день рождения С.В. Ковалевской) (Красноярск, 2002 г.), на международной конференции-школе по геометрии и анализу, посвященной памяти А.Д. Александрова (Новосибирск, 2002 г.), на Второй Восточно-Сибирской зональной межвузовской конференции по математике и проблемам ее преподавания в вузе (Иркутск, 2003 г.), на семинарах кафедры алгебры и геометрии ИГУ (1996-2004гг.), на геометрическом семинаре Казанского государственного университета (2004 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы из 103 наименований и приложений. Работа изложена на 136 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении делается исторический обзор основных идей и методов, которые впоследствии и привели к возможности рассмотрения геометрии псевдооктавного пространства. Также ставится цель исследования, обосновывается актуальность и научная значимость работы, кратко характеризуется ее содержание.

В первой главе рассматривается алгебра октав, элементами которой являются гиперкомплексные числа (числа Кэли). Группа автоморфизмов этой алгебры есть особая компактная группа Ли G_2, размерность которой равна четырнадцати. Алгебру октав можно представить в виде прямой суммы: $R \cdot 1 \oplus V$, где V – ортогональное дополнение к единице. Тогда $V = R^7$ является антикоммутативной алгеброй без единицы. При этом, в V существует базис $\{e_1, \ldots, e_7\}$ с таблицей умножения классической алгебры Кэли. В дальнейшем будем называть именно пространство V алгеброй Кэли.

В параграфе 1.1 рассматриваем таблицу умножения алгебры Кэли и допускаем в ней некоторый произвол, то есть варьируем знаки произведений, сохраняя предположение об антикоммутативности. В результате получаем, что, если в таблице умножения алгебры Кэли варьировать знаки произведений, сохранив предположение об антикоммутативности, то существует $2^7 = 128$ таких алгебр.

В параграфе 1.2 исследуется вопрос об изоморфизме полученных алгебр. При этом, предполагается, что изоморфизмы обязаны сохранять градуировку. По предположению, в таблице умножения алгебры Кэли знаки произведений не зафиксированы, то есть $[e_i, e_j] = c_{ij} e_{k(i,j)}$, где коэффициенты $c_{ij} = \pm 1$, а функция $k(i,j)$ определяется по прежнему закону из таблицы умножения. Рассматривается множество Z_2^7 параметров: $c_{12}, c_{17}, c_{25}, c_{36}, c_{37}, c_{45}, c_{46}$, остальные коэффициенты через них выражаются. На это множество действует группа, являющаяся полупрямым произведением групп подстановок базисных векторов и смены их направлений. В результате, получены две орбиты.

В параграфе 1.3 выясняем, чем отличаются симметричная билинейная форма $B(x, y) = Tr(ad\,x, ad\,y)$ для полученных выше двух алгебр.

Для первой орбиты скалярное произведение имеет сигнатуру (3,4) и индуцирует метрику семимерного псевдоевклидова пространства.

Зафиксировав знаки произведений в таблице умножения, получили алгебру, не изоморфную классической алгебре Кэли, со следующей таблицей умножения:

$$
\begin{array}{llll}
[e_1, e_2] = e_3, & [e_1, e_3] = -e_2, & [e_1, e_4] = -e_5, & [e_1, e_5] = e_4, \\
[e_1, e_6] = -e_7, & [e_1, e_7] = e_6, & [e_2, e_3] = e_1, & [e_2, e_4] = -e_6, \\
[e_2, e_5] = e_7, & [e_2, e_6] = e_4, & [e_2, e_7] = -e_5, & [e_3, e_4] = -e_7, \\
[e_3, e_5] = -e_6, & [e_3, e_6] = e_5, & [e_3, e_7] = e_4, & [e_4, e_5] = e_1, \\
[e_4, e_6] = e_2, & [e_4, e_7] = e_3, & [e_5, e_6] = e_3, & [e_5, e_7] = -e_2, \\
[e_6, e_7] = e_1. & & &
\end{array}
$$

Эта таблица умножения соответствует обобщенной алгебре Кэли-Диксона.

Аналогично, рассматривая вторую орбиту, получаем с точностью до знака евклидову метрику семимерного пространства. Зафиксировав знаки произведений, определяем таблицу умножения, которая совпадает с таблицей умножения классической алгебры Кэли.

Таким образом, существует только две неизоморфных между собой алгебры. Первая алгебра является классической алгеброй Кэли. Вторая алгебра менее известна. Это алгебра Кэли-Диксона. Умножение в этой алгебре индуцирует векторные и скалярные произведения в семимерном псевдооктавном векторном пространстве, то есть получаем псевдооктавную геометрию. В работе рассматривается только алгебра Кэли-Диксона. Группой её автоморфизмов является группа Ли G_2^n размерности 14. Ей соответсвует алгебра Ли g_2^n.

В параграфе 1.4 рассматривается матричная реализация алгебры Ли g_2^n как в ортогональном, так и в изотропном базисах.

Базис пространства V, полученный следующим образом:

$$m_1 = e_1 + e_5, \quad m_2 = e_2 + e_6, \quad m_3 = e_3 + e_7, \quad m_4 = e_4,$$
$$m_5 = e_1 - e_5, \quad m_6 = e_2 - e_6, \quad m_7 = e_3 - e_7,$$

будем называть изотропным, в том смысле, что $m_i^2 \equiv 0,\ i \neq 4$. При этом, $m_4^2 = -1$, $\langle m_1,\ m_5\rangle = 2$, $\langle m_2,\ m_6\rangle = 2$, $\langle m_3,\ m_7\rangle = 2$, остальные произведения равны нулю.

Матричную реализацию алгебры g_2^n в изотропном базисе обозначим $\bar{g}_2$. Доказана

Теорема 1.1. *Алгебра Ли $\bar{g}_2$ может быть представлена тройками (B, λ, μ) такими, что $\lambda,\ \mu \in V_3,\ B \in sl(3)$, причем закон умножения задается формулой:*

$$\begin{gathered}[(B_1,\ \lambda_1,\ \mu_1),\ (B_2,\ \lambda_2,\ \mu_2)] = \\ = ([B_1,\ B_2] + 3(\lambda_1 \otimes \mu_2^T) - 3(\lambda_2 \otimes \mu_1^T) - \langle\lambda_1,\ \mu_2\rangle + \langle\lambda_2,\ \mu_1\rangle, \\ 2[\mu_2,\ \mu_1] + B_1\lambda_2 - B_2\lambda_1,\ 2[\lambda_1,\ \lambda_2] - B_1^T\mu_2 + B_2^T\mu_1).\end{gathered}$$

В параграфе 1.5 выясняем, как далеко можно обобщить эту конструкцию в случае произвольного нечетномерного пространства.

Рассматривается (2n+1)-мерное пространство V, которое разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus R \oplus U^*$, U, U^* – две копии n-мерного пространства с невырожденной симметричной билинейной формой $\langle,\rangle$, так что U^* можно считать пространством, сопряженным к U. Предполагается также, что в U, а потому и в U^*, задан антикоммутативный закон умножения $[,]$, для которого выполняется тождество Якоби. R – одномерное пространство. Элемент пространства V представляет собой тройку элементов $(u,\ t,\ v)$, где $u \in U,\ t \in R,\ v \in U^*$. Предполагаем, что оператор $\mathcal{D}$

действует на элементы пространства V следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{D}u &= (\quad Bu, \quad Q\langle\mu,\ u\rangle, \quad [\lambda,\ u] \quad) \\ \mathcal{D}t &= (\quad t\lambda, \quad t\,C\ \ Tr(B), \quad t\mu \quad) \\ \mathcal{D}v &= (\quad -[\mu,\ v], \quad R\langle\lambda,\ v\rangle, \quad -B^T v \quad) \end{cases},$$

где $Q,\ R,\ C$ – некоторые константы, B – эндоморфизм линейного пространства U, λ, μ – линейные функции на U.

Доказана

Теорема 1.2. *Пусть множество таких матриц, в котором векторы λ, μ пробегают все пространство U, а матрица B пробегает некоторое подмножество $\mathcal{B}$, образует алгебру Ли. Тогда*

1) при $n = 1$ возможны следующие случаи алгебр матриц вида

a) присоединенное представление алгебры $sl(2)$:

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

b) трехмерная разрешимая алгебра:

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ 0 & Cb & 0 \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

где C – константа.

2) если алгебра Ли U некоммутативная, а $n = 3$, то имеем алгебру Ли матриц вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_\mu \\ \varepsilon\,\mu^T & 0 & \varepsilon\,\lambda^T \\ ad_\lambda & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 2$, B пробегает алгебру $sl(3)$. При этом умножение $[,]$ является векторным произведением евклидова или псевдоевклидова пространств, а умножение $\langle,\rangle$ – скалярным произведением в этих пространствах.

3) если алгебра U некоммутативная, то для любого $n > 1$ матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ ad_\lambda & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

образуют алгебру Ли, при условии, что в алгебре Ли U выполняются следующие условия:

$$[[x,\ y],\ z] = 0,$$
$$[Bx,\ y] + [x,\ By] + B^T[x,\ y] = 0,$$

где $x, y, z \in U$.

4) если алгебра U коммутативная, то для любого $n > 1$ алгебру Ли образуют только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & 0 \\ 0 & C \cdot Tr(B) & 0 \\ 0 & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

где B пробегает все множество $gl(n)$, $C = const$.

Дифференциальная геометрия семимерных многообразий и различных подмногообразий (кривых, поверхностей, гиперповерхностей и так далее) в пространствах со структурной группой G_2^n очень богата по сравнению даже с обычной октавной геометрией. Это связано с тем, что стандартное семимерное представление этой группы имеет более сложную структуру пространства орбит из-за наличия изотропных векторов и изотропных подпространств. Тем более это относится к линейным многообразиям различных размерностей. Например, к трехмерным подмногообразиям, касательные пространства которых образуют подалгебры. Также имеются двумерные подмногообразия, чьи касательные пространства вполне изотропны. Конечно, простейший случай – это одномерный случай (теория кривых).

Во второй главе развивается теория одномерных многообразий семимерного псевдооктавного пространства, то есть кривых.

При исследовании кривых используется метод внешних форм Картана для фиксации репера. Далее находятся инварианты, определяющие кривую и доказываются основные теоремы для различных типов кривых.

В параграфе 2.1 рассматриваются неизотропные кривые. Производится канонизация репера, находятся вычислительные формулы, доказывается основная теорема, описываются некоторые кривые с постоянными кривизнами; рассматриваются проекции пространственных кривых в трехмерное соприкасающееся подпространство для того, чтобы охарактеризовать некоторые инварианты в классических терминах.

Канонический неизотропной репер кривой полностью выражается через первые три производные вектор-функции, задающей данную кривую. Все инварианты, в свою очередь, определяются тремя первыми производными.

Основная теорема 2.1. *В семимерном псевдооктавном пространстве с сигнатурой* $(3,4)$ *задание произвольных гладких функций* $a_1(s),\ a_2(s), a_3(s), a_4(s), a_5(s), a_6(s)$ *определяет кривую, удовлетворяющую условиям:*

$$(r'(s))^2 \not\equiv 0 \quad (r''(s))^2 \not\equiv 0,$$

для которой коэффициенты a_i *деривационных формул канонического репера совпадают с этими заданными функциями. Эта кривая определяется с точностью до преобразований, сохраняющих псевдооктавную структуру.*

В параграфе 2.2 аналогично рассматриваются кривые, касательные к которым изотропны. В этом случае также справедлива основная теорема, но кривая определяется уже не шестью, а пятью гладкими функциями: $a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s), a_5(s)$.

В параграфе 2.3 производится канонизация репера кривой в изотропном базисе, находятся вычислительные формулы. В этом параграфе изучаются кривые, для которых

1) касательный вектор r' изотропен,

2) двумерная соприкасающаяся плоскость изотропна,

3) трехмерная соприкасающаяся плоскость изотропна, в частности, изотропны векторы r', r'' и r'''.

Для каждого случая доказывается основная теорема. Первый случай аналогичен случаю параграфа 2.2. Во втором случае также справедлива основная теорема, и кривая определяется четырьмя гладкими функциями: $a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)$. В третьем случае кривая определяется тремя гладкими функциями: $a_1(s), a_2(s), a_3(s)$.

Полное и исчерпывающее построение теории кривых не является нашей целью. По причине неизотропности изучаемого пространства число существенно различных случаев достаточно велико.

Полученные результаты представляют определенный интерес сами по себе, но более важную роль они могут играть при изучении строения подмногообразий большей размерности, в частности, гиперповерхностей.

В третьей главе рассматриваются шестимерные многообразия, скалярный квадрат нормали которых всюду положителен, либо всюду отрицателен. Таким образом, случай изотропной нормали нами не рассматривается.

В параграфе 3.1 рассматриваются шестимерные подмногообразия с положительно определенной нормалью. Проведена канонизация репера с использованием метода внешних форм Картана.

В этом случае вектор нормали задает эндоморфизм $Jx = [N,\ x]$, при $x \in T_M$, касательного пространства такой, что $J^2 = -1$. Поэтому на гиперповерхности можно ввести почти комплексную структуру. Более того, поскольку эндоморфизм сохраняет метрику, на гиперповерхности реализуется псевдоэрмитова геометрия.

Дано описание канонического репера. Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. *Кривизна нормального сечения гиперповерхности двумерной плоскостью вдоль фиксированного базисного вектора e_p выражается через коэффициенты второй квадратичной формы гиперповерхности.*

Утверждение 2. *В сечении шестимерной гиперповерхности трехмерной плоскостью получаем двумерную поверхность, у которой первая, вторая, третья квадратичные формы, а также полная и средняя кривизны выражаются через коэффициенты второй квадратичной формы гиперповерхности.*

Утверждение 3. *При проектировании интегральной кривой $r = r(s)$ такой, что $r'(s_0) = e_2(s_0)$ в фиксированной точке s_0, из семимерного псевдоевклидова пространства V в трехмерное евклидово подпространство получаем кривую такую, что ее кривизна, кручение и репер Френе выражаются через коэффициенты деривационных формул:*

кривизна кривой $k = \sqrt{(C^1_{22})^2 + (C^2_{23})^2}$,

кручение кривой

$$\kappa = \frac{C^1_{22}C^2_{232} - C^2_{23}C^1_{222} - C^1_{22}(C^2_{24}C^3_{24} + C^2_{25}C^3_{25} + C^2_{26}C^3_{26} + C^2_{27}C^3_{27})}{(C^1_{22})^2 + (C^2_{23})^2},$$

репер Френе кривой

$$\tau = e_2, \quad n = \frac{C^1_{22}e_1 - C^2_{23}e_3}{\sqrt{(C^1_{22})^2 + (C^2_{23})^2}}, \quad b = -\frac{C^2_{23}e_1 + C^1_{22}e_3}{\sqrt{(C^1_{22})^2 + (C^2_{23})^2}}.$$

Вычислен тензор Нейенхейса и доказано

Утверждение 4. *Почти комплексная структура на гиперповерхности S является комплексной, если выполняются условия:*

$$-C^k_{3+i\ 3+j} + C^k_{3+j\ 3+i} + C^k_{ij} - C^k_{ji} - C^{3+k}_{3+i\ j} + C^{3+k}_{j\ 3+i} - C^{3+k}_{i\ 3+j} + C^{3+k}_{3+j\ i} = 0,$$

$$-C^{3+k}_{3+i\ 3+j} + C^{3+k}_{3+j\ 3+i} + C^{3+k}_{ij} - C^{3+k}_{ji} + C^k_{3+i\ j} - C^k_{j\ 3+i} + C^k_{i\ 3+j} - C^k_{3+j\ i} = 0,$$

$i, j, k = \overline{2,7}$, *для коэффициентов построенного канонического репера.*

В параграфе 3.2 рассматриваются шестимерные подмногообразия с отрицательно определенной нормалью. В этом случае вводится изотропный базис псевдооктавного пространства и производится канонизация репера.

Вектор нормали задает эндоморфизм $Jx = [N,\ x]$, при $x \in T_M$, касательного пространства такой, что $J^2 = 1$. Тогда $Jm_i = m_i$, $Jm_{4+i} = -m_{4+i}$, $i = \overline{1,3}$. Так как касательное пространство распадается на два трехмерных подпространства: $T_x = P_+ \oplus P_-$, где $P_+ = \{z \in T_x | Jz = z\}$, $P_- = \{z \in T_x | Jz = -z\}$, то эндоморфизм $Jx = [N, x]$ определяет структуру почти произведения на шестимерной гиперповерхности.

Вычислен тензор Нейенхейса и доказано

Утверждение 5. *Структура почти произведения на гиперповерхности S является интегрируемой, если выполняются условия:*

$$C^{4+p}_{i\,j} = C^{4+p}_{j\,i}, \quad C^{p}_{4+j\ 4+i} = C^{p}_{4+i\ 4+j},$$

$i, j, p = \overline{1,3}$, *для коэффициентов построенного канонического репера.*

Специфика псевдооктавной геометрии состоит в том, что наряду с квадратичными формами ключевую роль в ней играют внешние дифференциальные формы, в частности, второй и третьей степени.

В параграфах 3.3 и 3.4 рассматривается погружение области в R^6, задающее гиперповерхность. В параграфе 3.3 исследуется гиперповерхность с положительно определенной нормалью, а в параграфе 3.4 – с отрицательно определенной нормалью.

Векторное произведение и скалярное произведение в семимерном пространстве образуют смешанное произведение, которое определяет антисимметричную трилинейную форму $\Omega(x, y, z) = \langle [x, y], z\rangle$. Группой, сохраняющей форму $\Omega \in \wedge^3 R^{7*}$, является особая некомпактная группа Ли G_2^n (нормальная форма комплексной группы Ли G^2).

Пусть $U \subset R^6$ – область и $f : U \to V$ – погружение такое, что $S = f(U)$ – гиперповерхность. Дифференциал df индуцирует внешние дифференциальные формы ψ, h второй и третьей степени на U, такие что

$$h(du, du', du'') = \Omega(df(du), df(du'), df(du'')),$$
$$\psi(du, du') = \Psi(df(du), df(du')) = \Omega(df(du), df(du'), N),$$

N – нормаль гиперповерхности.

Будем называть форму $h(du, du', du'')$, которая является ограничением формы Ω на касательное пространство гиперповерхности, *первой внешней фундаментальной формой третьей степени.* Форму $\psi(du, du')$, которая возникает после фиксации нормального вектора в форме Ω и ее ограничении на касательное пространство гиперповерхности, будем называть *второй внешней фундаментальной формой второй степени.*

В каждой точке гиперповерхности возникает репер $\{f_1, \ldots, f_6, N\}$, где $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u^i}$ – касательные векторы, N – нормаль гиперповерхности. Деривационные формулы имеют следующий вид:

$$df = f_i du^i, \;\; df_i = \Gamma^j_{i\alpha} f_j du^\alpha + b_{ij} du^j N, \;\; dN = c^j_i du^i f_j.$$

Введем обозначения:

$$h_{ijk} = \Omega(f_i, f_j, f_k) = \langle [f_i, f_j], f_k \rangle = (f_i, f_j, f_k),$$
$$\psi_{ij} = \Psi(f_i, f_j) = \Omega(f_i, f_j, N) = \langle [f_i, f_j], N \rangle = (f_i, f_j, N).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_{ijk}}{\partial u^m} = \Gamma^\alpha_{im} h_{\alpha jk} + \Gamma^\alpha_{jm} h_{i\alpha k} + \Gamma^\alpha_{km} h_{ij\alpha} + b_{im}\psi_{jk} + b_{jm}\psi_{ki} + b_{km}\psi_{ij}, \\ &\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial u^m} = \Gamma^\alpha_{im} \psi_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jm} \psi_{i\alpha} + h_{ij\alpha} c^\alpha_m. \end{aligned} \tag{1}$$

1) В параграфе 3.3 рассматривается некоторый октавный репер (неканонический) $\{e_1, \ldots, e_7\}$ в произвольной выбранной точке M такой, что вектор нормали N совпадает с вектором e_1, то есть $N^2 = 1$.

   Обозначим: $h^0_{ijk} = \Omega(e_i, e_j, e_k)$, $\psi^0_{ij} = \Psi(e_i, e_j)$, где $i, j, k \neq 1$. Из таблицы умножения векторов $\{e_i\}$, константы $h^0 \in \wedge^3 R^{6*}$, $\psi^0 \in \wedge^2 R^{6*}$ определены единственным образом: $h^0_{246} = 1$, $h^0_{347} = 1$, $h^0_{356} = 1$, $h^0_{257} = -1$, $\psi^0_{23} = 1$, $\psi^0_{45} = 1$, $\psi^0_{67} = 1$, а h^0_{ijk}, ψ^0_{ij}, не связанные условием кососимметричности, нулевые.

   Векторы $\{N = e_1, f_i\}$ образуют репер (неканонический, неоктавный) в точке гиперповерхности S. Вводится матрица $p = (p^j_i) \in GL(6)$, связывающая эти два репера, такая, что $f_i = p^\alpha_i e_\alpha$, $\alpha = \overline{2,7}$. Таким образом, существует отображение $p : U \to GL(6)$, что $h(u) = (h^0)^{p(u)}$, $\psi(u) = (\psi^0)^{p(u)}$ в каждой точке u поверхности S. Группа $GL(6)$ действует естественным образом в пространстве $\wedge^3 R^{6*} \oplus \wedge^2 R^{6*}$, размерность которого равна 35. Выясняем, что стационарной подгруппой, сохраняющей пару форм (h^0, ψ^0), является группа $SU(1,2)$ размерности 8 и матрица p определяется с точностью до произвольного множителя из $SU(1,2)$.

2) В параграфе 3.4 репер $\{m_1, \ldots, m_7\}$ – некоторый изотропный репер (неканонический) в произвольной выбранной точке M такой, что вектор нормали N совпадает с вектором m_4, то есть $N^2 = -1$.

Обозначим $h^0_{ijk} = \Omega(m_i, m_j, m_k)$, $\psi^0_{ij} = \Psi(m_i, m_j)$, где $i, j, k \neq 4$. Из таблицы умножения векторов m_i, константы $h^0_{ijk} \in \wedge^3 R^{6*}$, $\psi^0_{ij} \in \wedge^2 R^{6*}$ определены единственным образом: $h^0_{123} = 4$, $h^0_{567} = 4$, $\psi^0_{15} = 2$, $\psi^0_{26} = 2$, $\psi^0_{37} = 2$, а h^0_{ijk}, ψ^0_{ij}, не связанные условием кососимметричности, нулевые.

Векторы $\{N = m_4, f_i\}$ образуют репер (неканонический, неоктавный) в точке гиперповерхности S. Вводится матрица $p = (p^j_i) \in GL(6)$ такая, что $f_i = p^\alpha_i m_\alpha \quad i, \alpha = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

В этом случае, стационарной подгруппой, сохраняющей пару форм (h^0, ψ^0), является группа $SL(3)$ размерности 8, действующая в пространстве $R^3 \oplus R^{3*}$, и матрица p определяется с точностью до произвольного множителя вида:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix},$$

где матрица $A \in sl(3)$, 0 – нулевая матрица.

В каждом случае построен алгоритм, позволяющий выделять представителя в каждом классе эквивалентности группы $GL(6)$ по специальной унитарной подгруппе $SU(1, 2)$ или по специальной линейной подгруппе $SL(3)$. Это позволяет избавиться от произвола в выборе матрицы p. Справедлива

Лемма. *Задание форм h_{ijk}, ψ_{ij}, позволяет вычислить коэффициенты Γ^k_{ij}, b_{ij}, c^j_i из линейной системы уравнений (1).*

Доказана

Теорема. *Дифференциальные формы ψ и h, определенные в окрестности U произвольной выбранной точки M, удовлетворяющие структурным уравнениям и содержащиеся в орбите группы $GL(6)$, определяют погружение f окрестности точки M, образ которого является гиперповерхностью с положительно или отрицательно определенной нормалью. Это погружение определяется с точностью до изоморфизма $F(x) = Ax + a$, где $A \in G^n_2,\ x, a \in V = R^7$.*

Таким образом, в работе доказывается аналог теоремы Бонне для шестимерных гиперповерхностей: две внешние дифференциальные формы второй и третьей степени определяют погружение шестимерного многообразия в семимерное пространство с псевдооктавной структурой.

НА ЗАЩИТУ ВЫНОСЯТСЯ СЛЕДУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ:

1) Получено, что, если варьировать знаки произведений в таблице умножения классической алгебры Кэли, сохраняя предположение об антикоммутативности, то существует только две неизоморфные алгебры: классическая алгебра Кэли и менее известная алгебра Кэли-Диксона. Показано, что умножение в алгебре Кэли-Диксона индуцирует векторные и скалярные произведения в семимерном псевдооктавном векторном пространстве, то есть получаем псевдооктавную геометрию. Рассмотрена матричная реализация алгебры Ли g_2^n как в ортогональном, так и в изотропном базисах.

2) Получено обобщение этой конструкции в случае произвольного нечетномерного пространства с изотропным базисом.

3) Описана теория одномерных многообразий семимерного псевдооктавного пространства, то есть кривых.

4) Рассмотрены шестимерные многообразия (гиперповерхности), скалярный квадрат нормали которых всюду положителен, либо всюду отрицателен.

5) Доказан аналог теоремы Бонне для шестимерных гиперповерхностей в октавной геометрии: две внешние дифференциальные формы второй и третьей степени определяют погружение шестимерного многообразия в семимерное пространство с псевдооктавной структурой.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:

1. *Грушко П. Я., Кузуб Н. М.* О псевдоевклидовом варианте алгебры октав. // Сб. научных трудов Иркутского государственного университета "Дифференциальная геометрия обобщенных пространств с фундаментальной группой".- Иркутск: ИГУ, 1998.- С. 15-29.

2. *Кузуб Н. М.* Кривые в псевдоевклидовом пространстве с изотропными касательными. // Сб. научных трудов Иркутского государственного университета "Дифференциальная геометрия обобщенных пространств с фундаментальной группой".- Иркутск: ИГУ, 1998.- С. 36-47.

3. *Кузуб Н. М.* Кривые в семимерном псевдооктавном пространстве. // "Студент и научно - технический прогресс". Сб. тезисов докладов студентов и аспирантов ИГУ.- Иркутск: ИГУ, 1998.- С. 54.

4. *Кузуб Н. М.* О геометрии в семимерном пространстве с обобщенной октавной структурой. // Материалы Всероссийской молодежной научной школы-конференции

по математическому моделированию, геометрии и алгебре.- Казань, 1998.- С. 185-192.

5. *Кузуб Н. М.* Репер изотропных кривых в псевдооктавных пространствах. // Труды Восточно-Сибирской зональной межвузовской конференции по математике и проблемам ее преподавания в вузе.- Иркутск: ИГПУ, 1999.- С. 182-185.

6. *Грушко П. Я., Кузуб Н. М.* Один класс поверхностей в октавном пространстве. // "Математика в Восточных регионах Сибири: социокультурный аспект, ведущие тенденции развития, научные коммуникации и подготовка кадров". Материалы международной конференции.- Улан - Удэ, 2000.- С. 151-152.

7. *Кузуб Н. М.* Обобщение алгебры дифференцирований октав. // Тезисы докладов Всесибирского конгресса женщин-математиков (к 150-летию со дня рождения С.В. Ковалевской). - Красноярск, 2000.- С. 110.

8. *Grushko P.Ja., Kouzoub N.M.* About pseudohermitean submanifolds in octonion space. // International Congress on Differential Geometry in memory of Alfred Gray.- Spane, Bilbao, 2000.- p. 55-57.

9. *Грушко П. Я., Кузуб Н. М.* Структура почти произведения на шестимерных подмногообразиях алгебры обобщенных октав. // Тезисы докладов международной конференции по геометрии и топологии. -Украина, Черкассы: ЧИТИ, 2001.- С. 32-33.

10. *Grushko P.Ja., Kouzoub N.M.* About pseudohermitean submanifolds in octonion space. // Proceedings of the fourth International Mathema- tical Symposium "Symbolic computations. New horizons". Japan, Tokio, 2001.- p. 269-276.

11. *Кузуб Н. М.* Шестимерные подмногообразия алгебры об- общенных октав. // Тезисы докладов II Всесибирского конгресса женщин- математиков (в день рождения С.В. Ковалевской).- Красноярск, 2002.- С. 115-116.

12. *Грушко П. Я., Кузуб Н. М.* Геометрические структуры, индуцированные на гиперповерхностях псевдооктонионных пространств. // Тезисы докладов международной конференции-школы по геометрии и анализу, посвященной памяти А.Д. Александрова.- Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002.- С. 44.

13. *Kouzoub N. M., Grushko P. Ja.* Bonnet Theorem in Octonion Geomet- ry. // Abstracts of short communications and poster sessions of Inter- national Congress of Mathematicians. -China, Beijing, 2002.- p. 66-67.

14. *Кузуб Н. М.* Аналог теоремы Бонне в псевдооктавном пространстве. // Труды Второй Восточно-Сибирской зональной межвузовской конференции по математике и проблемам ее преподавания в вузе.- Иркутск: ИГПУ, 2003.- С. 103-107.

15. *П. Я. Грушко, Н. М. Кузуб.* Геометрические структуры, индуцированные на гиперповерхностях псевдооктонионных пространств. // Труды по геометрии и анализу.- Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003.- с. 242-255.